О некоторых новых достижениях теории приближения функций действительной переменной.

С. Н. БЕРНШТЕЙН (Москва).

§ 1. Когда в 1912 году мною впервые было установлено [1] [2] существование предела[1])

(1) $$\mu = \lim_{n=\infty} n E_n |x|,$$

из глубины технически сложного доказательства лишь неясно вырисовывалась какая-то связь решенной задачи с теорией целых трансцендентных функций. Казалось также правдоподобным, что и при всяком $s > 0$ должен существовать предел

(2) $$\mu(s) = \lim_{n=\infty} n^s E_n |x|^s = \lim_{n=\infty} E_n |nx|^s = \lim_{n=\infty} E_n (|x|^s; n).$$

Однако прошло еще 25 лет прежде, чем мне удалось доказать [3] общее равенство (2) и выяснить его истинный смысл. А именно: в работе [4] 1938 г. я показал, что $\mu(s)$ *есть наилучшее приближение* $|x|^s$ *на всей действительной оси посредством целых функций первой степени*[2]) ($\mu(s) = A_1 |x|^s$); вообще

(3) $$\frac{\mu(s)}{p^s} = \lim_{n=\infty} E_n\left(|x|^s; \frac{n}{p}\right) = A_p |x|^s$$

при любом данном p, где $A_p f(x)$ означает *наилучшее приближение функции*

---

[1]) $E_n(f(x); \lambda)$ означает наилучшее приближение функции $f(x)$ при помощи многочленов степени n на отрезке $(-\lambda, \lambda)$ при данном $\lambda > 0$; в случае $\lambda = 1$ пишем просто $E_n f(x)$.

[2]) Функцию действительной переменной $G_p(x)$ мы называем *целой функцией конечной степени* p, если она бесконечно дифференцируема и регулярна на всей оси и в какой-нибудь точке (например, $x = 0$)

(I) $$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{|G_p^{(n)}(0)|} = p,$$

эти функции совпадают с целыми трансцендентными функциями первого порядка экспоненциального типа с показателем p, так как равенство [I] равноценно равенству

$$\overline{\lim_{x=\infty}} x^{-1} \log | G_p(x e^{i\vartheta}) | = p$$

во всей комплексной плоскости.

$f(x)$ *при помощи целых функций данной степени p на всей действительной оси.* Тогда же было установлено [3] [5], что

$$(4)\qquad \lim_{n=\infty} n^s E_n |x-c|^s = (1-c^2)^{\frac{s}{2}} \mu(s) \qquad (-1<c<1)$$

и было также найдено точное значение предела

$$\lim_{n=\infty} n^s E_n F(x), \quad \text{где} \quad F(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k |x-c_k|^s$$

которое оказалось равным $\mu(s) \operatorname{Max}_{1\leq k\leq m} |a_k(1-c_k^2)^{\frac{s}{2}}|$ при любых данных a_k и c_k $(-1<c_k<1)$.

Хотя моя работа [4] 1938 года связана со старым мемуаром [6] из *Acta Mathematica* 1913 года, содержавшим первое доказательство равенства (1), но связь эта, по преимуществу, формальная. Теперь руководящим принципом исследования становится углубление и уточнение аналогий между свойствами алгебраических многочленов и целых функций конечной степени, и, в частности, доказательство равенства (3) свелось к установлению того факта, что *последовательность многочленов степени n наименее уклоняющихся от $|x|^s$ на отрезке $\left[-\frac{n}{p}, \frac{n}{p}\right]$ стремится при $n \to \infty$ $(p>0)$ к целой функции $G_p(x)$ степени p наименее уклоняющейся от $|x|^s$ на всей действительной оси.*

Существование целой функции $G_p(x)$, которая среди всех функций степени p наименее уклоняется от $|x|^s$ следовало из моей теоремы [7] 1923 года о максимуме модуля производной целой функции $G_p(x)$ степени p *ограниченной* на всей оси (использование формул мемуара из *Acta Mathematica* обобщенных в русской монографии [8], нужно было здесь, в сущности, лишь, как способ построения целой функции первой степени, уклонение которой от $|x|^s$ ограничено на всей оси). Вышеупомянутая *теорема о максимуме модуля производной*, которая для периодических функций была доказана [I] еще в 1912 году, утверждает как известно, что *неравенство*

$$(5)\qquad |G_p(x)| \leq L \qquad (-\infty<x<\infty)$$

влечет для всех функций степени p

$$(6)\qquad |G_p'(x)| \leq Lp \qquad (-\infty<x<\infty),$$

представляла собой первый простейший пример аналогии целых функций конечной степени p с многочленами $P_n(x)$ степени n, относительно которых в 1912 году было установлено [I], что *неравенство*

$$(5^{\text{bis}})\qquad |P_n(x)| \leq L \qquad (-\lambda \leq x \leq \lambda)$$

влечет

$$(6^{\text{bis}}) \qquad |P'_n(x)| \leq L \frac{n}{\sqrt{\lambda^2-x^2}} \qquad (-\lambda < x < \lambda).$$

Поэтому, если для некоторой последовательности многочленов $n \to \infty$, а $\frac{n}{\lambda} = p$ фиксировано, то в каждой данной точке x

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} |P'_n(x)| \leq L \frac{n}{\lambda} = L\,p$$

которое совпадает с неравенством (6). При этом замечательно, что в то время как знак равенства в (6^{bis}) осуществляется для многочленов Чебышева

$$L\,T_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = L \cos\left(n \arcsin\frac{x}{\lambda}\right)$$

(n четное), последние имеют пределом целую функцию степени p

$$\lim_{n=\infty} L\,T_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = L \cos p\,x \qquad \left(p = \frac{n}{\lambda}\right),$$

для которой осуществляется знак равенства в (6).

§ 2. Соответствующим образом развивая последнее замечание, можно придти к исчерпывающему обобщению предельного равенства (2), которое доказано в статье **[9]** в следующем виде:

Теорема I. *Если существует такое число $p_0 < \infty$, что $A_{p_0} f(x) < \infty$, то для всех $p > \gamma\,p_0$ имеют место предельные равенства* [3])

$$(8) \qquad \lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\, \frac{n}{p+0}\right) = A_p f(x), \qquad \lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\, \frac{n}{p-0}\right) = A_{p-0} f(x),$$

где $\gamma \approx 1{,}51$ определяется из уравнения

$$(9) \qquad \frac{1}{\gamma}\sqrt{\gamma^2+1} = \log\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2+1}\right).$$

При етом нижняя грань $\gamma\,p_0$ значений p, для которых (8) *справедливо, в общем случае не может быть снижена.*

Отсюда следует, в частности, что равенства (8) справедливы для всех $p > 0$, если $A_p f(x) < \infty$ для всех $p > 0$.

Таким образом, благодаря лемме **[10]**, утверждающей, что $A_p f(x) < \infty$ при всяком $p > 0$, если $f(x)$ имеет равномерно непрерывную производную

[3]) Нетрудно показать, что $A_p\, f(x)$ рассматриваемая как функция p, есть функция монотонно убывающая непрерывная справа. Согласно общему свойству монотонных функций, множество ее точек разрыва исчислимо; из равенств (8) видно, что в точках непрерывности A_p равенства (8) приводятся к единственному равенству

$$(8^{\text{bis}}) \qquad \lim_{n=\infty} E_n\left(f(x);\, \frac{n}{p}\right) = A_p f(x).$$

порядка $k \geqq 0$ при $x \leqq a \leqq b$ и порядка $l \geqq 0$ при $x \geqq b$, из теоремы I сразу получается не только формула (2), но и различные ее обобщения [10]. Например: если $s > 0$ и $m > 0$ *целые* числа, то существует предел

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^s}{(\log n)^{m-1}} E_n [x^s (\log |x|)^m] = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(\log n)^{m-1}} E_n \left[x^s \left(\log \left|\frac{x}{n}\right|\right)^m; n\right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{1}{(\log n)^{m-1}} E_n \left[x^s \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k (\log n)^k (\log |x|)^{m-k}; n\right] =$$

$$= m \lim_{n=\infty} E_n [x^s (\log |x|); n] = m A_1 (x^s \log |x|)$$

между тем, как (если $s > 0$ *любое вещественное* число, $m \geqq 0$ *целое* число)

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^s}{(\log n)^m} E_n [|x|^s (\log |x|)^m] = \lim_{n=\infty} E_n \left[|x|^s \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \left(\frac{\log |x|}{\log n}\right)^{m-k}; n\right] =$$

$$= \lim_{n=\infty} E_n (|x|^s; n) = A_1 |x|^s = \mu(s).$$

Вместо того, чтобы ограничивать априори класс рассматриваемых функций $f(x)$ условием $A_{p_0} f(x) < \infty$ (т. е. возможностью грубого приближения функции $f(x)$ при помощи целой функции G_{p_0} некоторой данной конечной степени p_0) фактически более интересно рассматривать классы функций, характеризуемые быстротою их возрастания на действительной оси. Этот подход связан с обобщением вышеупомянутой теоремы о максимуме модуля производной, опубликованным [11] также в 1923 г.: *Если целая функция $G_p(x)$ степени p удовлетворяет условию*

$$|G_p(x)| \leqq |H(x)| = \sqrt{s^2(x) + t^2(x)} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

где $H(x) = s(x) + i\,t(x)$ есть целая функция нулевого рода, корни которой $\alpha_k - i\beta_k$ $(\beta_k > 0)$ лежат в нижней полуплоскости[4]*, то производные любого порядка $n > 0$ удовлетворяют неравенствам:*

$$|G_p^{(n)}(x)| \leqq |\{(s(x) + i\,t(x))\, e^{-ipx}\}^{(n)}|. \tag{10}$$

В связи с этим в заметке [12] мною доказана соответствующая

Теорема II. *Если*

$$|f(x)| \leqq H(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{11}$$

где $H(x)$ четная функция нулевого рода, то предельные равенства (8)

---

[4]) Общее доказательство этой теоремы, которая мною была доказана в [8], [13] лишь при некоторых дополнительных ограничениях, дано впервые Н. И. Ахиезером в [14], где он кроме того неожиданно для меня распространил мою теорему на некоторые случаи, когда $s(x) + i\,t(x)$ является функцией конечной степени, т. е. первого, а не нулевого рода.

справедливы при всяком $p > 0$.[5]) (В частности, теорема II остается в силе, если $A_p f(x) = \infty$ при $p < p_0 \leqq \infty$: в этом случае имеем также

$$\lim_{n=\infty} E_n\left(f(x); \frac{n}{p}\right) = \infty \text{ при тех же } p < p_0.)$$

§. 3. Из предыдущего следует, в частности, что к функции $f(x) \in S_{k,\alpha}(M)$, дифференцируемой k раз и удовлетворяющей при всех x и h $(-\infty < x < \infty, h \geqq 0)$

$$(12) \qquad |f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)| \leqq M h^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqq 1)$$

предельные вазенства (8) применимы при всех $p > 0$. Очевидно также, что утверждения: 1) $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$, 2) $M f(x) \in S_{k,\alpha}(M)$, 3) $f(px) \in S_{k,\alpha}(p^{k+\alpha})$ попарно равнозначны, и с другой стороны, для всякой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$(13) \qquad A_p f(x) = A_1 f\left(\frac{x}{p}\right).$$

Поэтому справедливость неравенства

$$(14) \qquad A_1 f(x) \leqq C_{k,\alpha}$$

для всех функций $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$, где $C_{k,\alpha}$ некоторая, зависящая от k и α постоянная (которая не может быть снижена), равнозначна справедливости неравенств для всех $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$

$$(15) \qquad A_p f(x) \leqq \frac{C_{k,\alpha}}{p^{k+\alpha}} \text{ при любом } p > 0.$$

Прием фактического построения функции $G_p(x)$ данной степени p, приближающей любую функцию $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$ указанный, например, в заметке [17], дает некоторые конечные верхние границы для постоянных $C_{k,\alpha}$.

Как мы видим, неравенства (15), аналогичные классическим неравенствам Джексона [18] для наилучшего приближения 2π-периодической функции $E_n^* f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка n вытекают без всяких вычислений из определения класса $S_{k,\alpha}$ и из очевидного равенства (13). При этом сами упомянутые неравенства Джексона являются прямым следствием из (15), так как во всяком случае существуют неравенства

$$(16) \qquad E_n^* f(x) \leqq \frac{C^*_{k,\alpha,n}}{(n+1)^{k+\alpha}} \qquad (n \geqq 0 \text{ целое число})$$

[5]) Полагая, в частности

$$H(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{\beta_k^2}\right); \quad \beta_k = (k+1)\,[\log(k+1)]^{\alpha}, \quad \alpha > 1,$$

видим, например, что теорема II применима к функции $f(x)$, если

$$\log|f(x)| \leqq \frac{c|x|}{[\log|x|]^{\alpha}} \qquad (c > 0; -\infty < x < \infty).$$

Благодаря указанной выше работе Н. И. Ахиезера [14] и последним исследованиям Б. Я. Левина [15], дающим исчерпывающее распространение теоремы о модуле производной, условие теоремы II может быть несколько расширено.

для всех 2π-периодических функций $f(x) \in S_{k,\alpha}(1)$, где постоянные $C^*_{k,\alpha,n}$ (зависящие от k, α, n) не могут быть более снижены. Но учитывая **[19]**, что функцией $G_{n+\delta}(x)$ степени не выше $n+\delta$ $(0 \leqq \delta < 1)$ наименее уклоняющейся от 2π-периодической функции $f(x)$ служит тригонометрический полином $S_n(x)$ порядка n, имеем вследствие (15) и (16)

$$\frac{C^*_{k,\alpha,n}}{(n+1)^{k+\alpha}} \leqq \frac{C_{k,\alpha}}{(n+\delta)^{k+\alpha}}, \text{ т. е. } C_{k,\alpha,n} \leqq C_{k,\alpha}. \tag{17}$$

Как известно, FAVARD **[20]** и, независимо от него, Н. И. АХИЕЗЕР и М. Г. КРЕЙН **[21]** нашли точное значение постоянной $C^*_{k,\alpha,n}$ для случая $\alpha = 1$, которая также оказалась независимой от n: а именно,

$$C^*_{k,1,n} = C^*_{k,1} = \frac{4}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{kl}}{(2l+1)^{k+2}}. \tag{18}$$

Недавно (благодаря предельным равенствам, аналогичным (8)), я доказал **[16]**, что при всех $\alpha \leqq 1$

$$\lim_{n=\infty} C^*_{k,\alpha,n} = C_{k,\alpha}. \tag{19}$$

Отсюда следует, в частности, что[6])

$$C_{k,1} = C^*_{k,1}. \tag{20}$$

Принципиальный интерес представляет существование другого предельного равенства, аналогичного (19)

$$\lim_{n=\infty} C_{k,\alpha,1} = C_{k,\alpha} \tag{19bis}$$

(получающегося из предельных равенств (8)), где $C_{k,\alpha,n}$ наименьшая постоянная в неравенствах

$$E_n f(x) \leqq \frac{C_{k,\alpha,n}}{n^{k+1}} \qquad (f(\alpha) \in S_{k,\alpha}(1)). \tag{16bis}$$

Таким образом, из (19) и (19bis) заключаем **[16]**, что

$$\lim_{n=\infty} C_{k,\alpha,n} = \lim_{n=\infty} C^*_{k,\alpha,n} = C_{k,\alpha} \tag{21}$$

при всех[7]) целых $k \geqq 0$ и $0 < \alpha \leqq 1$.

§ 4. Принявши в 1912 году за основу классификации всех непрерывных на отрезке $(-1, 1)$ функций закон убывания их наилучших приближений $E_n f(x)$, я имел в виду главным образом создание единообразного метода для выявления того, обладает ли или нет заданная так или иначе функция определенным дифференциальными или структурными свойствами (например, принадлежит ли $f(x)$ к классу Липшица $S_{k,\alpha}$ с данными k, α, явля-

---

[6]) Справедливость равенства (20) М. Г. Крейном [22] была установлена непосредственно.

[7]) Равенство $\lim_{n=\infty} C_{0,1,n} = C^*_{0,1}$ впервые было доказано С. М. Никольским [23].

ется ли $f(x)$ аналитической функцией, регулярной на $(-1, 1)$ и т. д.). Не останавливаясь подробно на новых достижениях в этом направлении, укажу, что, как видно из предыдущего, при классификации и приближении функций $f(x)$ непрерывных *на всей оси вместо многочленов следует применять целые функции $G_p(x)$ конечной степени, причем заком убывания $A_p f(x)$ характеризует, подобно $E_n f(x)$ на $(-1, +1)$ соответствующие структурные свойства $f(x)$ на всей действительной оси.*

В качестве достойного внимания обобщения классов Липшица рассмотрим совокупность функций $f(x) \in S_q(p_1, \ldots, p_k; a_1, \ldots, a_k; M)$ характеризуемую свойством [17]

$$\left| \sum_{i=1}^{k} p_i \big(f(x+a_i; h) - f(x)\big) \right| \leq M \cdot h^q \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{22}$$

где, для определенности, полагаем: 1) $a_1 = 1 < a_2 < \ldots < a_k$, 2) $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Посредством тех же соображений, которые в § 3 привели нас к неравенству (15), заключаем, что из (22) следуют неравенства для всех функций $f(x) \in S_q(p_1, \ldots p_k; a_1, \ldots a_k; M)$

$$A_p f(x) \leq \frac{C_s M}{p^q}, \tag{23}$$

где постоянная C_s зависит только от q, p_i, a_i, но не зависит от p. Полагая значение $M < \infty$ произвольным в неравенстве (22) мы будем говорить, что $f(x) \in S_q(p_i, a_i) = S_q(p_1, \ldots, p_k; a_1, \ldots, a_k)$ принадлежит *специальному однородному классу* $S_q(p_i, a_i)$ порядка q. Из (23) видно, что для всякой данной функции $f(x) \in S_q(p_i, a_i)$ справедливы при *всех* $p > 0$ неравенства вида

$$A_p f(x) \leq \frac{R}{p^q} \tag{23^{bis}}$$

с одной и той же постоянной R (зависящей от $f(x)$). Класс Ω_q, где $R < \infty$ называем *основным однородным классом порядка* q: таким образом, согласно вышесказанному, из $f(x) \in S_q(p_i, q_i)$ следует $f(x) \in \Omega_q$. Давно известно, что в случае (12) класса Липшица $f(x) \in S_{k,\alpha}$ обратное утверждение верно только при $\alpha < 1$.

Полное решение[8]) вопроса об условии эквивалентности между собой двух различных специальных классов $S_q(p_i, a_i)$ и $S_q(p_i^*, a_i^*)$, а также об эквивалентности $S_q(p_i, a_i)$ основному классу Ω_q дано мною в заметках **[17]**, **[25]**. Для этого необходимо ввести в рассмотрение *целое* число m_0, которое я

---

[8]) Важный шаг в исследовании этого вопроса (решающую роль играет применение теоремы о максимуме модуля производной) для периодических функции сделан Zygmund'ом **[24]** в 1945 году.

называю *характеристикой* класса $S_q(p_i, a_i)$, определяемое как *наименьшее из целых* $m>0$, для которых $\sum_{i=1}^{k} p_i a_i^m \gtrless 0$. В таком случае *все специальные классы порядка q эквивалентны между собой, когда их характеристики равны*. Поэтому все специальные однородные классы можем, для краткости, обозначать через $S_q^{(m_0)}$ указывая явно лишь порядок q и характеристику m_0. Если, кроме того, $q \leq m_0 < q+1$, то *все эти специальные классы* $S_q^{(m_0)}$ *эквивалентны классу Липшица* $S_{k,\alpha}$, *где* $k=m_0-1$, $0<\alpha=q-k=q+1-m_0\leq 1$ (т. е. пользуясь для обозначения *эквивалентности* классов знаком $=$) $S_{k+\alpha}^{(k+1)}=S_{k,\alpha}$, при любых целых $k\geq 0$ и $0<\alpha\leq 1$. Хотя эти результаты существенным образом опираются на рассмотрение основного однородного класса Ω_q, однако при исследовании вопроса об эквивалентности основного класса Ω_q соответствующим специальным классам $S_q^{(m_0)}$ следует иметь в виду, что первый, Ω_q, вообще шире последних, так как, из (22) следует, что $f(x)$ *алгебраического роста* (т. е. существует $m<\infty$, для которого $\frac{f(x)}{x^m}\to 0$, при $x=\infty$), между тем как это не обязательно при (23).

Поэтому для получения простых условий эквивалентности надо вводить те или иные ограничения [17], [25]. Если, например, мы предположим, для простоты, функции $f(x)$ *ограниченными* [17] (в частности, периодическими), то $S_q^{(m_0)}=\Omega_q$ при всех $q<m_0$. Что касается распространения изложенных здесь резултатов на функции нескольких переменных, которое является одной из важных целей теории наилучшего приближения, то, останавливаясь на этом вопросе, отмечу лишь заметки [25], [26], [27].

Цитированная литература. [9])

[1] О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, *Сообщ. Харьк. Мат. Общества*, **13** (1912), стр. 49—194.

[2] Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes, *Proceedings 5. International Math. Congress, Cambridge*, **1** (1912), p. 256-266.

[3] Sur la meilleure approximation des fonctions non regulières, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **205** (1937), p. 825-827.

[4] О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени, *ИАН*, № 2 (1938), стр. 169-190.

[5] О наилучшем приближении $|x-c|^p$, *ДАН*, 18 (1938), стр. 358-388.

[6] Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés, *Acta math.*, **37** (1913), p. 1-57.

[7] Sur une propriété des fonctions entières, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **176** (1923), p. 1603-1605.

[9]) Работы, приведенные без указания имени автора, принадлежат С. Н. Бернштейну. *ДАН=Доклады Академии Наук СССР; ИАН=Известия Академии Наук СССР*, сер. мат.

[8] *Екстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной*, ч. 1 (Ленинград — Москва, 1937 .

[9] Предельные законы теории наилучших приближений, *ДАН*, **58** (1947), стр. 525-528.

[10] Новый вывод и обобщение некоторых формул наилучшего приближений, *ДАН*, **54** (1946), стр. 667-678.

[11] Sur les propriétés extrémales des polynomes et de fonctions entières sur l'axe réel, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **170** (1923), p. 1782-1785.

[12] О приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени, *ДАН*, **54** (1946), стр. 479—482.

[13] *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* (Paris, 1926).

[14] Н. И. Ахиезер, О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа, *ДАН*, **10** (1946), стр. 411—428.

[15] Б. Я. Левин, О некоторых экстремальных свойствах целых функций конечной степени, *ДАН*, **65** (1949), стр. 605—608.

[16] О предельных зависимостях между константами теории наилучшего приближения, *ДАН*, **57** (1947), стр. 3—5.

[17] О свойствах однородных функциональных классов, *ДАН*, **57** (1947), стр. 111—114.

[18] D. Jackson, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen, *Dissertation Göttingen*, 1911.

[19] Конструктивная теория функций, как развитие идей Чебышева, *ДАН*, **9** (1945), стр. 145—157.

[20] J. Favard, Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonométriques, *Bulletin des Sciences Math.*, **61** (1937), p. 209—224, 243—256.

[21] Н. И. Ахиезер и М. Крейн, О наилучшем приближении периодических функций, *ДАН*, **15** (1937) стр. 107—111.

[22] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации* (Москва—Ленинград, 1947).

[23] С. М. Никольский, Наилучшие приближения функций, удовлетворяющих условию Липшица, *ДАН*, **52** (1946), стр. 7—9.

[24] A. Zygmund, Smooth functions, *Duke Math. Journal*, **12** (1945), p. 47—76.

[25] Вторая заметка об однородных функциональных классах, *ДАН*, **59**, (1948), стр. 1379—1384.

[26] О целых функциях конечной степени многих вещественных переменных, *ДАН*, **60** (1948), стр. 949—952.

[27] С. М. Никольский, Обобщение одного предложения С. Н. Бернштейна о дифференцируемых функциях многих переменных, *ДАН*, **59** (1948), стр. 1533—1536.

(*Поступило 9/XI 1949 г.*)